

Oyun teorisi: Ders 4 Transkript

17 Eylül 2007

Profesör Ben Polak: Geçen sefer yeni bir kavram ortaya atmıştık ve bu en iyi tepki kavramıydı. Ve neydi bu kavram? Diğerlerinin, rakiplerinizin, diğer oyuncuların ne yapacağına olan beklentiniz sabitken, yapabileceğiniz en iyi şey olan stratejiyi düşünme fikriydi bu. Ve bunu şöyle düşünebilirsiniz – bunun sizin seçiminizi rasyonalize eden/ seçiminize bahane olan bir beklenti olduğunu düşünebilirsiniz. Yani bir patronunuz varsa – ve o size seçtiğiniz aksiyonu neden seçtiğinizi soracaksa, şöyle yapmak isteyebilirsiniz. Eğer bir beklentiye göre en iyi tepkiyi gösterdiyseniz, ben bu aksiyonu seçtim çünkü diğerlerinin şunu yapacaklarını bekledim. Ve bu da o beklenti altında yapabileceğiniz en iyi şey olduğundan işinizde kalacağınızı ümit edebilirsiniz.

Bugün dünyadaki en önemli oyuna bakacağımıza söz vermiştim. Ve geçen sefer belirttiğimiz gibi en önemli oyun penaltı atışı oyunu. Yani bu futbolda oluşan bir oyun ve şu futbol fanatığı olan talihsizler için ne kadar önemli olduğu hakkında fikir vermek için, son dünya kupası penaltı atışlarıyla sahibini buldu. İngiltere'nin durumunda, İngiltere tüm Dünya Kupalarından ve Avrupa Kupalarından elenir çünkü penaltı atışlarında kaybeder, aslında söylemek gerekirse Almanya'ya kaybeder. Ve daha yakın bir tarihte, geçen hafta sonu, siz hepiniz dünyadaki en önemli olayın Kongrede Irak hakkında olan bitenler olduğunu düşünürken, aslında dünyadaki en önemli olay İngiltere'de gerçekleşiyordu ve benim favori takımım Portsmouth, başasistan Kaj'ın favori takımı Liverpool ile karşılaşılıyordu. Ve maçın üçte birlik bölümü geride kaldığında bir penaltı oldu ve... Size sonucun ne olduğunu sonra söylerim. Yani aklınızın bir köşesinde gerçek hayattan en önemli örneğin bu hafta sonu oynanan Portsmouth Liverpool karşılaşması olduğunu tutun. (Başasistan Kaj İskandinav, yani ne hikmetle Liverpool'u tutuyor bilmiyorum ama belki de onu şöyle hecelediğini veya böyle hecelediğini düşünüyorum.)

Şimdi yapacağımız şey şu, penaltı atışını değişik yönlere doğru kullandığınızda gol atma olasılıklarını yaklaşık olarak veren rakamlara bakacağız. Ama herkesten emin olmak için – burada ne olduğunu açıklamama gerek var mı? Herkes bu duruma aşina mı? Koşarak gelip topa vuracak bir adam var. Kaleci kalesinde duruyor. Ve amaç topu kaleye sokmak. Muhtemelen bu kadarı yeterli. Hepsiniz bunu görmüşsünüzdür, değil mi? Eğer görmediyseniz gidin görün. Hadi ama yani! Yani hayatta yapılacak şeyler: Shakespeare okuyun ve bir futbol maçı seyredin.

Kabaca bu rakamlar şunlar – aslında dersin ileri safhalarında size daha doğru rakamlar vereceğim, ama şimdilik bunlar yeterli. Golcü – hücumcunun topu vuracağı üç yol var. Topu sola, ortaya veya sağa doğru vurabilir. Ve tabii burada hücumcunun sadece erkek (he) olduğunu söylememem lazım, erkek veya kadın (she) olabilir, ama

bir yanlışım olursa beni maruz görün. Kaleci sola veya sağa yatabilir. Prensipde kaleci ortada da kalabilir. Daha sonra gelip ona da bakacağız. Bu adam atışı kullanan, ona atıcı (shooter) diyelim ve bu da kaleci.

Bunlar aşağı yukarı – önce getirileri yazayım ondan sonra açıklarım. Fark ettiyseniz buraya önce rakamlar sonra onların negatiflerini yazacağım ve rakamlar aşağı yukarı şöyle: (4, -4). Yani rakamlar şunlar: (4, -4), (9, -9), (6, -6), (6, -6), (9, -9) ve (4, -4). Ve buradaki olay şu, 4 rakamı topu sola vurduğunuzda ve kaleci de sola atladığında %40 olasılıkla gol atacağınızı gösteriyor. Yani buradaki getiri şunun gibi $u_1(\text{sol})$ kaleci sola yatarsa 4'e eşit, ve bu %40 gol olasılığı demek.

Yani atıcının rakamı – Atıcının getirisi gol atma olasılığı ve kalecinin ki de bunun negatifi. İşleri basit turalım. Daha önce belirttiğim gibi, şimdilik kalecinin ortada durma ihtimalini yok sayacağız. Şimdi bu önemli oyunu nasıl incelemeliyiz? Birkaç hafta önce veya bir hafta önce öğrenmeye başladığımız kavramlarla, dominant/baskın stratejilerle başlarız. Buradaki oyunculardan herhangi birinin domine edilen stratejisi var mı? Oyunculardan herhangi birinin domine edilen stratejisi var mı? Hayır, açıkça belli oluyor, yok.

Hadi örnek olarak atıcıya bakalım. Ortanın Solu domine ettiğini düşünebilirsiniz, ama dikkat ederseniz Sola karşı Ortanın, Soldan daha iyi getirisi var. Kaleci sağa atlarsa daha az getirisi var. Yani çok da sürpriz olmadı, bu oyunda kaleci Sola atlarsa vuruşu Sağa yapmak sizin için en iyisi, sizin için ikinci en iyi ise vuruşu Ortaya yapmak ve en kötüsü Sola vuruş yapmak. Bu tabii ki eğer kaleci Sola atlarsa. Ve eğer kaleci Sağa atlarsa, Sol sizin için en iyisi, Orta ikinci en iyi ve Sağ en kötüsü ve bu akla yakın.

Tamam, yani birinci haftadan sonra dersi bitirmiş olsaydık, tek öğrendiğimiz domine edilen stratejileri silmek olurdu ve apışıp kalırdık. Bu oyun hakkında söyleyecek bir şey bulamazdık ve daha önce de belirttiğim gibi bu en önemli oyun ve bu Oyun Teorisi için kötü olurdu. Ama şanslıyız çünkü bundan biraz daha iyisini yapabiliriz. Bunu yapmadan önce sınıfta bir oylama yapalım. Kaçınız eğer şey için oynuyor olsaydınız, sanırım Amerika için oynardınız ve bu bir talihsizlik ama neyse. Amerika için oynuyorsunuz ve penaltı atışı kullanacaksınız ve bu Dünya Kupasının son vuruşu, kaçınız, ellerinizi görelim, kaçınız Sola doğru vururdu? Kaçınız Ortaya doğru vururdu? Kaçınız Sağa doğru vururdu?

Aşağı yukarı eşit bölünme var burada, eşit dağılıma oldukça yakın. Bunların doğru rakamlar olduğunu varsayacağız ve eşit dağılım iyi bir fikir mi değil mi ona bakacağız. Bunun hakkında nasıl düşünmeliyiz? Benim önerim geçen sefer yaptığımız gibi, kalecinin ne yapacağına olan beklentime bağlı olarak beklenen getirimi görmek için bir şekil çizmeye başlayalım. Yani bu geçen sefer çizdiğimizle benzer bir şekil.

Yatay eksen benim beklentim var, benim beklentim kalecinin Sağa atlama olasılığı. Şimdi geçen sefer yaptığım gibi, şekli daha iyi çizebilmek için iki dikey eksen koyayım. Yani bu 0 ve bu 1. Sizin defter sayfalarınız çizgili olabilir ama bende yok, bu yüzden izin verin kendi işimi biraz kolaylaştırırım. Yani bu 2, 4, 6, 8, 10, bu şöyle

olacak 2, 4, 6, 8, 10 ve burada da 2, 4, 6, 8, 10; 2, 4, 6, 8, 10. Bu benim şeklimin temeli olacak.

Yani bu Sola atma ihtimaliyle başlayacak. Hadi bunu kırmızıyla yapalım. Yani ben Sola atıyorum ve kaleci Sola atlıyor, benim getirim nedir? 4'tür. Ben Sola atarsam ve kalecinin Sağa atlama olasılığı yoksa, ki bu Sola atlayacak demek, benim getirim 4 olur, yani %40 gol olur. Sola atarsam ve kaleci Sağa atarsa, %90 gol olur, yani benim getirim 9. Bu arada neden %100 değil de %90, Kaçırabilirim, tamam mı, kaçırabilirim. Bu %10'la bayağı sık oluyor gibi görünüyor.

Aradakinin düz bir çizgi olacağını biliyoruz, öyleyse o çizgiyi çizelim. Peki bu nedir? Kalecinin Sağa atlama olasılığına bağlı olarak, Oyuncu 1'in Sola atış yapmaktan beklenen getirisidir. Ve bunun tam tersi, şöyle yazabiliriz... hadi sırayla yapalım.

Yani Orta: Ben Ortaya atarsam ve kaleci Sola atarsa, benim getirim 0,6, 6, veya %60 gol yaparım ve eğer ben Ortaya atarsam ve kaleci Sağa atarsa ben hala %60 ihtimalle gol yaparım, ve yine arada düz çizgi var. Bu çizgi de kalecinin Sağa atlama olasılığının bir fonksiyonu olarak Ortaya atış yapmaktan beklenen getiriye gösterir.

Son olarak – bunu yeşille yapalım – Sağa atış yaptığım zamanki getirilere, beklenen getirilere bakalım. Ben Sağa atarsam ve kaleci Sola atarsa, gol atma olasılığım 0,9, veya getirim 9. Tam tersi durumda, ben Sağa atarsam ve kaleci Sağa atarsa, %40 ihtimalle gol atarım. , yani buradaki getirim 0,4. Ve işte bu yeşil çizgi, kalecinin Sağa atlama olasılığının bir fonksiyonu olan benim atıcı olarak Sağa vurmamdan beklenen getirimi gösterir.

Herkes bu şekli nasıl çizdiğimi anladı mı? Geçen sefer çizdiğimizden daha kolay bir şekil bu. Peki bu şekilde herkesin fark ettiği ne var? Şekilde ilk bakışta göze çarpan ne var? Bu rakamların doğru olduğunu varsayarsak, şekilde göze çarpan şey ne? Buraya birkaç mikrofon alabilir miyiz? Ayağa kalkın, kırmızılı arkadaş. İsminiz nedir? Mikrofonu tutmayın; sadece bağırın.

Öğrenci: Hiçbir nokta yok ki 6, Ortaya atış yapmanın yüksek getiri sağladığı hiçbir nokta yok.

Profesör Ben Polak: Kesinlikle, kesinlikle. Yani bu şekilde hemen gözünüze çarptığını umduğum şey şu (bunun $\frac{1}{2}$ olduğunu bulmak çok zor olmasa gerek), yani eğer kalecinin $\frac{1}{2}$ den düşük olasılıkla Sağa atlayacağını düşünürseniz, o zaman yapabileceğiniz en iyi şey şu yeşil çizgi ile gösterilir, yani Sağa atış yapmak. Yani kaleci $\frac{1}{2}$ den düşük olasılıkla Sağa atış yapacak, pardon $\frac{1}{2}$ den düşük olasılıkla Sağa atlayacak, siz Sağa atmalısınız.

Tam tersi, eğer kalecinin $\frac{1}{2}$ den yüksek olasılıkla Sağa atlayacağına dair beklenti oluşturursanız, yapabileceğiniz en iyi şey, en iyi tepkiniz Sola atmak olur. Ve bu oyunda verilen rakamlarla hiçbir beklenti Ortaya atmak için bahane olamaz. Doğru

mu? Yani hayır: başka bir deyişle, kaleciyle ilgili hiçbir kanıma, hiçbir beklentime göre Orta en iyi tepki değildir.

Yani burada bir ders var, ve bu daha çok (sırf dersin akışını tekrar sağlamak için) : varsayalım Dünya Kupasındasınız, İngiltere için oynuyorsunuz, takım arkadaşlarınıza ve menajerinize, patronunuza, hatta 60 milyon kızgın taraftara aksiyonunuzu haklı göstermeniz lazım. Buradaki ders nedir? Çok açık görüldüğünü umuyorum, buradaki ders nedir? Ders şu, atışı Ortaya doğru kullanma. Bu dersi vasıflandırayım, eğer Alman değilseniz. Almanlar istediklerini yapabilirler.

Şimdi, bu hafta sonu benim takımım Portsmouth ve Kaj'ın takımı Liverpool arasındaki maçın üçte biri geride kalmışken bir penaltı oldu. Portsmouth penaltı kazandı ve penaltıyı kullanacak oyuncu vuruşu yapmak üzere geldi ve vuruşu Ortaya yaptı ve penaltı kaçtı. Yani bu aksiyonları haklı çıkardı, sadece hafta sonumu berbat etmekle kalmadı, hafta boyunca Kaj ile dalga geçme fırsatımı da elimden aldı, yani çok önemliydi. Yani bu hafta sonu, bu kuralı göz ardı eden birisi tarafından bir penaltı kaçırıldı.

Burada daha genel bir ders var ve bu daha genel ders şu, tabii ki: hiçbir beklentinize göre hiçbir zaman en iyi tepki olmayan bir stratejiyi seçmeyin. Genel ders, hiçbir beklentiye göre hiçbir zaman en iyi tepki olmayan bir stratejiyi seçmeyin. Fark ettiyseniz, geçen sefer sonlara doğru ortaya çıkan bir şeyin altını çizelim, bu sadece Kaleci sola atlayacak veya kaleci sağa atlayacak şeklinde bir beklenti değil. Bu aradaki tüm olasılıklar için geçerli. Yani şöyle bir beklentiniz olabilir, kaleci iki köşeye de aynı ihtimalle atlayacak, buna izin var.

Ama eğer bahane olacak hiçbir beklenti yoksa, onu yapmayın. Ve bu oyunda ortaya çıkan şeyin altını çizmek gerekirse, fark ettiyseniz bu oyunda hiçbir şey domine edilmese de stratejilerden birini silebiliriz, bu durumda atışı Ortaya yapmak. Baskınlık (domination) ve silinmiş domine edilen stratejilere baktığımızda bir yere varamadık. Burada, en azından, bir yerler ulaştık, penaltı atışını Ortaya kullanma fikrinden kurtulduk. Şimdi eğer biriniz İngiliz ve Portsmouth'lu oyuncular bu konuda ikna edebilirse çok memnun olurum.

Bunu geçmeden önce, bu derste zaman zaman gerçekliğe döneceğimize söz vermiştim, ve bu gerçek futbol oyununun çok basit bir modeli. Hadi bir deneyelim, Yale futbol takımında olan var mı aranızda? Hayır mı? Herhangi biriniz lise takımında futbol oynamış mıydı? Bir veya iki. Hiç futbol oynamış olan var mı? Kaç tanenizin futbol oynamışlığı var? Tamam, güzel, bir ara endişelenmeye başlamıştım. Yani, geçen sefer söylediğimiz bir şey şuydu ortaya bir model koyup ondan bir takım dersler çıkarmaya çalışırken, bir adım geriye çekilip burada ne eksik diye sormalıyız. Hadi şimdi bir takım şeyler – Jude'un işini kolaylaştırmak için sahneden ineceğim. Burada eksik olan ne? Bu futbolun bir parçası olan modelde eksik olan ne, bu oyun içinde oyunda eksik olan ne? Burada eksik olan ne? Neden bu büyük ihtimalle %100

eksiksiz bir model değil? Burada birkaç mikrofona ihtiyacım olacak. Siz? Gerçekten bağırmanız çünkü mikrofondan çok uzaktasınız.

Öğrenci: Solak olup olmadığınıza göre sola veya sağa atış yapmaktan birisi daha iyi olabilir sizin için.

Profesör Ben Polak: Güzel, yani burada eksik olan şeylerden birisi sağ ayaklı oyuncuların kendi sollarına doğru daha rahat vurdukları, bu aslında kalecinin sağ tarafı oluyor. Yani sağ ayaklı oyuncular, kaleyi karşıya aldığımızda, sola daha rahat vurular. Herkes bunu doğrulayabilir mi? Evet, bunu deneyen oldu mu hiç? Ayağınızın ters yönüne doğru sert bir vuruş yapmak daha kolaydır, bu beysboldakiyle aynı prensip. Sopyayı salladığınız yöne doğru topa sert vuruş yapmak, ters tarafa doğru sert vuruş yapmaktan daha kolaydır. Evet?

Öğrenci: Oyuncular önceden karar verip sonra bu karar bağlı kalmıyor olabilirler.

Profesör Ben Polak: Tamam, oyuncular topa doğru koşarken karar verirler. Sanırım burada sorun yok, değil mi? Bunu topa tam vuracağınız anda karar veriyormuşsunuz gibi düşünebiliriz. Tamam doğrudur, soyunma odasında karar vermiş olabilirsiniz veya ilk yarı sonunda karar vermiş olabilirsiniz, ama en sonunda önemli olan – ümit edelim de gitsin (parazit sesi). Benim mikrofonumdan olmadığına emin misiniz? Ne olur ne olmaz ben mikrofonumu biraz daha aşağıya indireyim. Şimdi daha çok bağıracağım çünkü mikrofonum daha alçakta. Kararın ne zaman verildiği o kadar da önemli değil. Eninde sonunda, kaleci atıcının kararını, atıcı da kalecinin kararını bilmiyor. Yani bu sanki atıcı koşarken karar veriyormuş gibi bir durum. Başka? Evet, şunu alabilir miyiz? Tae şu arkadaşını alabilir misin? Ayağa kalkın. Bağırın.

Öğrenci: Kaleci Ortada durabilir.

Profesör Ben Polak: Kaleci Ortada durabilir. Bu iyi bir nokta, tabii ki ben burada biraz özet yapmıştım ve aslında, sanırım bir problem ödevine koymayı deneyeceğim, ama sanırım haklısın, burada önemli bir konu. Başka? Buraya bazı gerçek rakamlar koyalım ve bizim burada yaptıklarımızla ne kadar örtüşüyor bir bakalım. Ben size çok önceleri uydurduğum bir takım rakamlar vermiştim, ama ben bu oyunu sınıfta kullanmaya başladıktan sonra birileri gidip kontrol etmiş.

Ve öyle ki Ortayı bir saniyelikine yok saymak, ortayı yok saymak – bunlar gerçek rakamlar ve bu gerçek rakamlar Chiappori ve ortak yazarlarının Amerikan Ekonomi Dergisinde (AER, American Economic Review) çıkan bir makalelerinden geliyorlar. Yale'deki herkesin isterse bakabilmesi için, dergi bankası (JSTORE) veya Yale kütüphanesi aracılığıyla bu makaleyi ulaşılır hale getireceğim. Onların buldukları şu tabloydu. Ve tekrardan, burada biraz dikkatli olmamız gerekiyor. Burada Sol ve Sağ tırnak içine alacağım çünkü yapmış oldukları şey şu, insanların doğal istikametlerini ve doğal olmayan istikametlerini hesaba katmışlar. Yani buradaki olay sağ ayaklıysan sola vurmaya doğal istikamet, yani burada sol demek doğal istikamet demek. Tabii ki eğer sol ayaklıysan tam tersi olur, ama bunu hesaba katmışlar.

Gol atma olasılıkları şöyle oluşmuş, 63,6, 94,4, 89,3 ve 43,7. Yani işler – size Orta için olan rakamları vermedim ama – Yani görüyoruz ki söyleyen her kimdiyse doğru söylemiş, doğal istikametinize doğru vurduğunuzda gol yapma olasılığınız kesinlikle daha yüksek. Burada hala domine edilen yok ve tam olarak aynı analizi bunda da yapabiliriz ve aslında uydurduğum rakamların da çok farklı olmadığını görebilirsiniz, ama burada tam simetri yok. Bunu kimin söylemiş olduğunu unuttum ama doğru söylemiş.

Kalecinin hareket etmemesi durum kesinlikle önemli, ama dediğim gibi bununla problem ödevinde uğraşacağız, ama burada bir sorun daha var. Bir soruna daha deyinim. Sorun şu, vuruş yapmak için koşarken, penaltıyı sola veya sağa atmak dışında, karar vermeniz gereken bir şey daha var. Daha önce futbol oynamış olan birisi, vermen gereken diğer karar nedir? Şuradaki bayanı alabilir miyim? Başka neye karar vermelisiniz?

Öğrenci: Yukarı köşeye doğru vurabilirsiniz..

Profesör Ben Polak: Tamam, yukarı veya aşağı vurabilirsiniz, bu doğru. Tamam, bu gerçekten doğru, bu doğru. Ama ben başka bir şey ima etmişim, bu doğru, ben başka bir şey ima etmişim. Başka ne olabilir? Şuradaki arkadaşı deneyelim.

Öğrenci: Falso.

Profesör Ben Polak: Bu aşırı detaya kaçtı. Bu daha temel bir şey, nedir bu daha basit şey? Burada daha basit olan şey ne?

Öğrenci: Hız.

Profesör Ben Polak: Hız, doğru. Vermen gereken diğer karar topa elinden geldiğince sert vurmak veya plase denemek. Yani örneğin siz, topa çok sert vuran ama fazla isabet ettiremeyen biriyseniz (itiraf etmeliyim ben böyleyim) o zaman buradaki rakamlar aslında değişebilir. Eğer topa çok sert vuruyorsanız ama fazla isabetli vuramıyorsanız, o zaman sola veya sağa vurduğunuzda kaçırma şansınız biraz daha fazla. Diğer yandan, ortaya doğru vuruşunuz, topa çok sert vurduğunuz için gol yapma şansınız biraz daha fazla olur.

Şimdi, eğer bu çok gizli ve alakasız bir detay gibi görünüyorsa, bu şekilde neden önemli olduğuna bir bakalım sonra en azından bugünkü futbolu bırakacağız. Yani eğer topa çok sert vurabilen ama fazla isabet sağlayamayan biriyseniz, o zaman bu Sağa vurduğunuzdaki gol atma olasılığınızı düşürecek çünkü kaçırabilirsiniz ve bu Sola vurduğunuzdaki gol atma olasılığınızı da düşürecek, çünkü kaçırma şansınız daha yüksek ve aslında Ortaya vurduğunuzda gol atma olasılığınızı yükseltebilir, çünkü o kadar sert vuruyorsunuz ki kalecinin bu şutu çıkarması oldukça zor. Burada Ortaya gidiyor ve dikkatli bakarsanız, yeterince net yapmadım, daha önce çılgın bir strateji gibi görünen Orta birden normal oldu.

Şu noktalı çizgilere bakarsanız, arada bir alan, şu ve şunun arasında kalan alan, aslında Ortaya atarak gayet iyi durumda olabilirsiniz. Yani gerçekte, biraz daha fazlasını hesaba katmalıyız ve özellikle oyuncuların isabetli ve/veya sert vurma özelliklerini hesaba katmalıyız. Ve eğer bu insanlar, eğer bu ilginizi çekiyorsa – ve farkındayım bu noktada sınıftaki Amerikalıların ilgisini muhtemelen kaybettim, ama sınıfta Amerikalı olmayanlar için, gerçek dünyayla ilgilenenler için – daha önce dediğim gibi, makaleyi çevrimiçine koyacağım ve bu tüm detayların üzerinden geçiyor.

Size verdiğim data gerçek data, ama bunların karma yetenek verileri olduğunu söylemem lazım. Bu verilerin yarısı gerçekten iyi olan İtalyan liginden, diğer yarısı ise berbat olan Fransız liginden geliyor. Yani buna ne kadar güvenilir olduğunu kim bilir? Tamam, bu bugünkü örneğimizdi; bugünkü gerçekliğe değinmemizdi. Hadi tahtayı silip biraz iş yapalım. Biraz daha resmi bir şeyler yapalım burada. Burada bir örneğimiz var ama ben daha genelleştirmeye daha resmiyete geri gitmek istiyorum. Bu arada, maçın 0-0 berabere bitmiş olduğunu söylemeliyim. Benim için bir vicdan zaferi sanırım.

Bu gayri resmi bahsetmiş olduklarımı resmiyete dökmek istiyorum. Ve özellikle en iyi tepkinin tanımına resmiyet kazandırmak istiyorum. En iyi tepki için 2 farklı tanım yazacağım. Bunlardan bir tanesi bir başkasının oynadığı sol veya sağ gibi belirli bazı stratejilere karşı en iyi tepkiyle ilgili olacak, diğeri ise daha genel bir kavram olarak belirli bir beklentiye karşı en iyi tepkiyle ilgili olacak. Böylece notasyonumuzu kullanabileceğiz ve daha entel görüneceğiz.

Eğer – işte notasyonumuzu kullanmak için asıl bahanemiz bu --- eğer diğer oyuncuların stratejisi S_{-i} ye karşı Oyuncu i 'nin \hat{S}_i (bunu ayrıştırılabilmek için şapkası olacak) seçiminden getirisi, S_{-i} ye karşı başka stratejisi S_i' tan getirisine büyük eşitse ve bu tüm S_i' lar için geçerli olmalı, o zaman Oyuncu i 'nin \hat{S}_i stratejisi S_{-i} ye en iyi tepkidir (best response her zaman kısaltması BR'dir). Yani önce gördüğümüz tanımlarda “tüm” nitelemesi diğerlerinin stratejileri üzerindeydi. Burada ise “tüm” nitelemesi benim stratejim üzerinde.

Yani eğer diğer oyuncuların stratejisi S_{-i} ye karşı benim \hat{S}_i seçiminden getirim, S_{-i} ye karşı başka bir strateji S_i' seçiminden olan getirime büyük eşitse, \hat{S}_i stratejisi S_{-i} ye en iyi tepkidir. Ve bu benim seçebileceğim diğer tüm stratejiler için geçerli olmalıdır. Bunu yazmanın bir başka yolu daha var, bu daha kullanışlı veya benzeri, \hat{S}_i şunun çözümüdür. S_{-i} 'ye karşı benim getirimi maksimize eder. Hepiniz alıştınız, umuyorum hepimiz max terimin görmeye alıştınız. Bu maksimizasyon problemini çözerken, diğerlerinin S_{-i} seçimleri sabitken kendi getirimi nasıl maksimize ederim? Yine, sınıftaki matematik fobisi olanlar paniklemeyin, bu sadece bugün, aslında bugün ve önceki gün, birkaç kez gördüğümüz şeyin kelimelerle ifade edilmesi.

Hadi bu tanımı genelleştirelim biraz, çünkü bunun daha genel beklentileri de içermesini istiyoruz. Sadece tekrar yazıyoruz, Oyuncu i 'nin stratejisi, yine aynı \hat{S}_i en

iyi tepkidir. Ama şimdi dikkat edelim, diğer oyuncuların seçimleri hakkındaki beklenti P'ye karşı en iyi tepkidir, eğer ki— ve bu çok benzeşecek sadece şimdi beklentiler olacak—Oyuncu i'nin P beklentisi veri iken, \hat{S}_i dan beklenen getirisi, başka herhangi bir strateji seçiminden beklenen getirisinden büyükse ve bu seçebileceği tüm S_i stratejileri için geçerli olmalı. Yani oldukça benzer bir kavram, ama tek şey, burada getirimin stratejime ve bir beklentime bağlı olduğunu söylerken biraz notasyonu suiistimal ediyorum, ama asıl demeye çalıştığım beklenen getirim. Bu beklenti/kanaat (belief) veri iken beklenen (expectation).

Yine öbür şekliyle yazabiliriz, veya ben S_i seçerken \hat{S}_i maksimumu çözüyor, bu kez benim S_{-i} ye karşı S_i seçmekten beklenen getirimi maksimize etmek için. Beklenen getiri ile ne demek istiyorum? Hemen bizim örneğimizde, bu beklenenin ne olduğunu netleştirmek için, örneğin, yukarıdaki oyunda Oyuncu i'nin Sol oynamaktan beklenen getirisi, P beklentisi veri iken, eşittir, kalecinin sola atlama olasılığı çarpı Oyuncu i'nin sola karşı sol seçiminden getirisi, artı kalecinin sağa atlama olasılığı çarpı Oyuncu i'nin sağa karşı sol oynamaktan beklenen getirisi. Yani P'ye göre beklenen tamda onun ne anlama geleceğini beklediğiniz şey. Yani bu birazcık matematik, birazcık formalite, ama herkes için tamam mı? Burada yaptığım bir şey yok. Tek yaptığım şey biraz daha sıkıcı ve entel yazmak, tam olarak birkaç sefer gördüğümüz gibi.

Öğrenci: [duyulmuyor]

Profesör Ben Polak: Teşekkürler. Yani bu şimdi bir anda bir notasyon patlaması gibi duracak, o yüzden asıl önemli olan şeyin fikir olduğunu kendimize hatırlatalım ve önümüzdeki yarım saati bu fikri bir uygulamaya uyarlayarak geçirelim. Yani bu uygulama futbol kadar önemli değil, biraz daha iktisatvari (Economicsy), yani dersin ekonomi başlığını buna bahane olarak kullanabilirim. Futbol oyunumu siliyorum. Hayal edin – Bakacağımız oyun bir ortaklıkla ilgili. Yani Ortaklık Oyunu. Ve eğer zorluk çekerseniz, sanırım bu veya buna çok benzer bir oyun Watson ders kitabında detaylı olarak yer alıyor.

Fikir şu. Ortak bir projeye girdi sağlayacak iki kişi var. Yani bu bir firma olabilir, bir hukuk firması olabilir, örneğin, ve bunlar kazanılan kârı eşit olarak paylaşacaklar. Yani bir örnek olarak, ikisinin de kazandığı, pardon, ikisinin de sahip olduğu bir firma olabilir, veya başka bir örnek benim ödevim üzerine uğraşan iki kişilik bir çalışma grubu olabilirsiniz. Yani bu firmanın, ya da bu ortak projenin, kârını eşit olarak paylaşacaklar, ama bireysel olarak emek verecekler/efor sarf edecekler. Biraz daha resmi olalım.

Yani bu oyuncular firmanın sahipleri olan, şöyle adlandıralım, iki vekil (agent) olacaklar. Bu firmaya ortaklar ve kârı eşit paylaşacaklar, yani her biri kârın %50'sini alacak. Yani bu bir kâr-paylaşım ortaklığı. Her vekil firmaya harcayacağı kendi emek seviyesini seçecek. Yani şuna karar veriyor olabilirsiniz, işe kaç saatinizi vereceksiniz. Yani pek çoğunuz için bu firmaya günde 20 saat mi yoksa 21 saat mi

harcayacağınız sorusu olacak veya bunun gibi. Umuyorum ki pek çoğunuzun ödevleri için harcadığı biraz daha azdır, ama çok da az değildir.

Yani strateji seçimleri, bunları saatlerle ölçmeyeceğiz, normalize edelim ve diyelim ki bu seçimler 0 ile 4 arası yaşamak gibi ve 0 ile 4 arasında herhangi bir rakamı seçebilirsiniz. Bunu geçerken bir değişikliği not edelim, Şimdiye kadar gördüğümüz tüm oyunlarda kesikli sayıda strateji vardı. Hatta rakamlar seçtiğinizde, 1, 2, 3, 4, 5 ve 100'e kadar olan rakamları seçtiğinizde bile, 100 tane stratejiniz vardı. Burada sürekli/sınırsız sayıda strateji (continuum of strategies) var. $[0, 4]$ aralığında herhangi bir reel sayıyı seçebilirsiniz. Yani sınırsız sayıda seçeneğiniz var. Bu bizi rahatsız etmeyecek ama böyle olduğunu belirtelim. Yani sınırsız sayıda strateji var. Prensip, müşterilerinize saniyenin belli bir küsüratı veya dakikanın belli bir küsüratı için fatura çıkarabilirsiniz.

Hadi firmanın kârını neyin belirlediğine bakalım. Yani bu ortaklık, bu hukuk firması, bunun kârı şu ifade ile belirleniyor: 4 çarpı (Oyuncu 1'in eforu artı Oyuncu 2'nin eforu) artı burada B adını vereceğim bir parametre çarpı eforlarının çarpımı. Bu onların kârı. Ve şimdilik B'nin ne olduğunu size söylemeyeceğim, ama sadece – yani onun tam olarak ne olduğunu söylemeyeceğim—ama onu açıklayacağım. B'nin 0 ile $\frac{1}{4}$ arasında olduğunu ve bilindiğini varsayacağız, ben sadece daha sonra bunu değiştirebilmek istiyorum. Yani buradaki düşünce nedir? Düşünce şu, Oyuncu 1 çalışarak firmanın kârına doğrudan katkıda bulunabilir, aynı şekilde Oyuncu 2 de. Ama bunun dışında şu etkileşim terimi üzerinden de katkıları olur. Bu etkileşim terimi hakkında nasıl düşünmeliyiz? Buradaki $B S_1 S_2$ terimi hakkında nasıl düşünmeliyiz?

Siz ev ödevleriniz üzerinde çalışırken, eğer ürününüz, sizin teslim etmiş olduğunuz sadece S_1+S_2 idi, buna göre ne düşünebilirsiniz? Bir çalışma grubunda olmanın boşuna olduğunu düşünebilirdiniz. Eğer ürününüz sadece girdilerin toplamı veya girdilerin toplamının belli bir katı olsaydı, bir takımında çalışmanın hiçbir özendirici tarafı olmazdı. Zaten en başta takım olmayı değerli kılan şey bir başkasıyla beraber çalışırken aldığınız bu ekstra çıkar gerçeği. Yani birlikte çalışırken sinerjilerin olduğunu varsayacağız. Bazılarınız ödevin bir kısmında iyidir, bazılarınız diğer kısmında iyidir. Yani bu hukuk firmasında, bu adamlardan birisi fikri mülkiyeti üzerinde diğeri de dolandırıcılık veya başka bir konuda uzman.

Yani vekillerim var. Strateji kümelerim var. Firmanın kârı hakkında bir şeyler biliyorum. Bunların getirileri hakkında bir şeyler söylemem lazım.

Getiriler: Oyuncu 1'in getirisi, tabii ki, kendi seçimine ve ortağının seçimine bağlı olacak ve bu $\frac{1}{2}$ -- çünkü kârı paylaşıyorlar—yani kârın $\frac{1}{2}$ sine eşit olacak. Yani $(4 \text{ çarpı } S_1 \text{ artı } S_2 \text{ artı } B S_1 S_2)$ nin yarısı, Bu kârın yarısını alıyor ama bunun ona maliyeti S_1 kare oluyor. Yani S_1 kare onun efor maliyeti, onun girdi maliyeti. Bu efor maliyeti. Aynı şekilde, Oyuncu 2 – burada her şey simetrik—Oyuncu 2'nin getirisi de aynı. Bu ifade de aynı ancak bir farkla burada Oyuncu 2'nin eforunun karesini çıkartmamız lazım: S_2 kare.

Yani firmanın kârını alıyorsunuz ve kaçırdığınız onca uyku için rahatsızlığı (disutility) çıkarıyorsunuz. Şurada beşinci, sırada fazla uyku kaçırmış bir arkadaş var, birisi dürtükleyiversin. Evet o, güzel. Onu kameraya çıkarmayacağız sadece dürteceğiz. Evet o, güzel. İşte bu. Bir dahaki sefere kamerayı kullanacağız. Şimdi bu firmayı, ya da siz ödevinizin üzerinde veya bir hukuk ortaklığında çalışırken, işlerin nasıl yürüyeceğini incelemek için istediğimiz her şeye sahibiz. Yeniden, sırf size bunu alakalandırmak için, tabii ki bu bayağı yapay, ama dışardaki firmaların çoğu ortaklık ve bunun gibi kâr paylaşımları ve sinerjileri var. Yani bu pek çok işletme için geçerli bir konu.

Şimdi bunu inceleyeceğiz – bu bir sır değil—bunu en iyi tepki kavramını kullanarak inceleyeceğiz. Bu çoğunuz için sürpriz olmadı çünkü güne bununla başlamıştık. Yani özellikle Oyuncu 2'nin her olası seçimine karşı Oyuncu 1'in en iyi tepkisinin ne olacağını bulmak istiyorum. Oyuncu 2'nin olası her S_2 seçimine karşı Oyuncu 1'in en iyi tepkisi nedir? Bunu yapmayı nasıl başarabilirim? Bunu nasıl yapmalıyım? Yani burada önceden yaptığımız şey Oyuncu 1'in beklentileriyle şu olasılıkların grafiklerini çizmekti ve buradaki problem şu, daha önce çizbildiğimiz güzel basit bir grafik vardı çünkü Oyuncu 2'nin sadece 2 stratejisi vardı.

Oyuncu 2 kaleciydi, sola veya sağa atlayabilirdi. Buradaki problem, Oyuncu 2'nin sınırsız sayıda stratejisinin olması ve tahtada bütün olasılıkları sınırsız sayıda objenin üzerine çizmeye çalışmak benim çizim becerilerimi aşar. Çok zor. Yani başka bir tekniğe ihtiyacımız var. Oyuncu 1'in en iyi tepkisini nasıl bulacağız? Birileri? Ellerinizi havada sallayın, ta arka köşede. Ben, siz, mikrofonu alalım. Ayağa kalkın ama mikrofonun size doğru gelmesini bekleyin. Bunu nasıl yapacağız? Oyuncu 1'in en iyi tepkisinin ne olduğunu nasıl bulacağız? Yüksek sesle bağız.

Öğrenci: [duyulmuyor]

Profesör Ben Polak: Güzel, tamam. Bu kesinlikle ilk adım. Bunu yapmıştık, aslında bunu yapmıştık. İşte burada Oyuncu 2'nin ve Oyuncu 1'in seçimlerinin fonksiyonu olarak Oyuncu 1'in getirisi, yani bu zaten elimizde. İki efor seviyesinin fonksiyonu olarak Oyuncu 1'in getirisi elimizde ve ben şimdi belirli bir S_2 sabitken Oyuncu 1'in en iyi tepkisinin ne olduğunu bulmak istiyorum. Evet.

Öğrenci: S_1 in türevini alırız.

Profesör Ben Polak: Güzel, türev alalım ve --.

Öğrenci: Sıfıra eşitleyelim

Profesör Ben Polak: Tamam, güzel. Yani kalkülüs kullanacağız. Tek bir değişkenli Kalkülüs kullanacağız. Sadece tek bir değişkeni değiştiriyoruz, S_1 . Kaçınız – kameranın sizi görmesine izin vermeyeceğiz—kaçınız görmedi – hiç el kaldırtmayacağım. Eğer şu an tahtada kullanacağım kalkülüsü görmediyseniz veya daha muhtemelen lisede görüp unuttuysanız paniklemeyin.

Kitabın arkasında bir ünite var, sanırım Ünite 25, bunun üzerinden gidiyor, bu tip kalkülüs için hatırlamanızı sağlıyor. Ve eğer görmediyseniz, daha önce hiç görmediyseniz, daha önce Mat 112 veya dengi bir ders almadıysanız gelip bizi görün. Bu insanlara özel hızlı bir kalkülüs dersi, oturumu açmaya gayret ederiz. Şimdi yapacaklarım ürkünçse gelip bizi görün, bunu hallederiz.

Tamam, yapacağım şey, bunun türevini almak istiyoruz. Yapacağımız şu, şu soruyu soruyoruz, S_1 seçerken kârın maksimumu nedir? Biraz zaman kazanmak için şu $\frac{1}{2}$ yi buradaki 4'le çarpabilir miyim? Yani kâr $2S_1$ artı S_2 artı $B S_1 S_2$ eksi S_1 in karesi. . Şu soruyu soruyoruz, S_2 veri iken, S_1 'in hangi değeri bu ifadeyi maksimize eder ve şu arkadaki beyefendinin söylediği gibi, türev alacağım ve bunu 0'a eşitleyeceğim. Benim bunu tahtada yanlış yapmam çok olası. Bu yüzden bir saniye beni şahin gibi seyrediyor musunuz?

Yani bu nesnenin türevini alırsak, bir saniye içinde birinci dereceden koşulu bulacağım. Tamam, yani türev alırız. 2 burada kalacak, sonra bu S_1 bir olacak ve bu S_1 ise artı $B S_2$ olacak, herkes mutlu mu? Şu S_1 kare ise eksi $2S_1$ olacak. Bu sadece diferansiyel almaydı. Herkes benim aldığım türevden memnun mu? Liseden hatırladınız mı? Dişliler dönüyor mu şimdi? Bunu birinci dereceden koşul haline getirmek için, "en iyi tepkide" diyeceğim, 1'in üstüne bir şapka koyacağım. En iyi tepkide bu 0'a eşit olacak. Evet Tae, şu arkadaşşı alabilir misin yeniden?

Öğrenci: Şu 2 olmayacak mıydı, pardon. Boş verin.

Profesör Ben Polak: Tamam, bağırarakla iyi yaptın çünkü ben çok – yani bunu tahtada yaparken yanlış yapma olasılığım çok yüksek, ama tamam. Yani bu nesnenin türevini aldım, bu birinci dereceden türevim ve bunu 0'a eşitledim. Şimdi bir saniye sonra bununla çalışacağım, ama önce minimum değil de maksimum bulduğumdan emin olmak istiyorum, minimum yerine maksimum bulduğumdan nasıl emin olabilirim? İkinci dereceden türevine bakarım, bu da ikinci dereceden koşul olur. Yani bu nesnenin tekrar S_1 'e göre türevini alacağım. Şu şapka yok muş gibi davranın bir saniye. Buradakilerin hiçbirinin içinde S_1 yok, yani bu hepsi gider. Ve elimizde eksi 2 kalır, şuradan geldi bu: eksi 2 ve bunun eksi olduğu gerçeği, tek bilmek istediğim şey.

Maksimumu bulmak için ikinci türevin negatif olmasını isterim. İşte burada, bu benim birinci dereceden koşulum. Bu bana S_2 ye en iyi tepkinin bu denklemini, bu birinci koşulu çözen \hat{S}_1 olduğunu söylüyor. Bunu tekrar yazabiliriz, her iki tarafı 2'ye bölüp düzenlersem, bu bana \hat{S}_1 'in, ya da arzu ederseniz \hat{S}_1 eşittir 1 artı $B S_2$. Yani bu şey S_2 veriyken Oyuncu 1'in en iyi tepkisi. Şimdi tam olarak aynı şeyi Oyuncu 2 için de yapabilirim, ama bunu yapmayacağım çünkü her şey simetrik. Herkes bundan memnun mu?

Aynı zamanda – aynı şekilde analizi yeniden yapabilirdim ama biliyoruz ki sonuç aynı çıkacak. Yani benzer bir şekilde \hat{S}_2 eşittir 1 artı $B S_1$ bulacağım ve bu da Oyuncu 1'in efor seçimi S_1 'e bağlı olan Oyuncu 2'nin en iyi tepkisidir. Tamam, şimdi ben Oyuncu

2'nin tüm olası seçimleri için şu yukarıda ve Oyuncu 1'in tüm olası seçimleri için şu aşağıda, Oyuncu 1'in Oyuncu 2'ye en iyi tepkisinin ne olduğunu ve Oyuncu 2'nin Oyuncu 1'e en iyi tepkisinin ne olduğunu buldum. Şimdi biraz daha ilerleyebilir miyiz bakalım. Ve biraz daha ilerleyebilmek için bir şekil çizelim.

Yapacağım şey şu, yeni bulduğumuz şu iki fonksiyonu çizip nasıl göründüklerine bakmak istiyorum. Bu zaten sizin notlarınızda var o yüzden bundan kurtulabilirim. Şimdi ihtiyacım olan şey ise biraz daha tebeşir. Af edersiniz. Şunu yapacağım, hadi bir şekil çizelim, yatay eksen S_1 ve dikey eksen S_2 olsun. Ve burada Oyuncu 1 için değişik seçenekler 1, 2, 3, 4 ve burada 45° çizgisi var. Eğer dikkatli olursam doğru yaparım 1, 2, 3 ve 4 Oyuncu 1'in muhtemel seçimleri. Şimdi bunu çizmeden önce şu B'nin ne olacağına karar vermem lazım.

Tamam, şu durum için çizeceğim – Oyuncu 1'in en iyi tepkisini ve Oyuncu 2'nin en iyi tepkisini bir dakika içinde çizeceğim, B eşittir $\frac{1}{4}$ durumu için. B'nin 0 ile $\frac{1}{4}$ arasında bir şey olduğunu söylemiştik, B eşittir $\frac{1}{4}$ durumu için çizelim. İlk olarak çizmek istediğim ifade Oyuncu 1'in S_2 'nin bir fonksiyonu olan en iyi tepkisi ve şunda anlaşmıştık bu şimdi 1 artı $\frac{1}{4} S_2$ olmalı. Yani her olası S_2 seçimi için, Oyuncu 1'in en iyi tepkisini çizeceğim ve bunu kırmızı ile yapacağız. Yani Oyuncu 2 sıfırı seçerse, Oyuncu 1'in en iyi tepkisi ne olur? Birileri bağırarak söylesin.

Öğrenci: 1.

Profesör Ben Polak: 1, tamam. Yani 1 artı sıfırın dörtte biri 1'dir, yani Oyuncu 2 sıfırı seçerse Oyuncu 1'in en iyi tepkisi 1'dir. Peki ya Oyuncu 2 dördü seçerse? Eğer Oyuncu 2 dördü seçerse, Oyuncu 1'in en iyi tepkisi ne olur? Şöyle olur 1 artı $\frac{1}{4}$ çarpı 4, $\frac{1}{4}$ çarpı 4 bir eder, yani 1 artı 1 eşittir 2, yani bu durumda Oyuncu 1'in en iyi tepkisi 2 olur. Yani eğer Oyuncu 1 dördü seçerse, Oyuncu 2, özür dilerim, eğer Oyuncu 2 dördü seçerse Oyuncu 1 ikiyi seçmeli ve arada düz çizgi olacak. Yani çizmiş olduğum bu düz çizgi Oyuncu 2'nin seçimine bağlı olan Oyuncu 1'in en iyi tepkisi. Herkes bunu çizmiş şeklimden memnun mu? Sanırım aradakinin düz çizgi olduğuna itikat ediyorsunuz, ama öyle.

Bu grafiği okumanın yolu, siz bana bir S_2 verirsiniz ben de boylu boyunca şu pembe çizgiye gidip aşağıya bakarım ve bu bana Oyuncu 1'in en iyi tepkisini verir. Şimdi aynı şeyi Oyuncu 2 için yapabiliriz, Oyuncu 1'in seçeneklerine bağımlı olan Oyuncu 2'nin en iyi tepkisini çizebiliriz, ama bunun matematiğiyle uğraşmadan, ben zaten bu çizginin nasıl görüneceğini biliyorum. Bu çizgi nasıl görünür? Birileri el kaldırsın. Birisi? Aynı şekil üzerinde Oyuncu 1'in seçimlerine bağlı olan Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi nasıl görünür? Daha önce almadığımız birisi olsun, bu arkadaşların hepsini daha önce almıştık, bir başkası. Evet, ortada bir arkadaş var ona ulaşabilir miyiz? Evet belki öbür taraftan daha kolay olur. Yüksek sesle bağırın da mikrofonu sesiniz gitsin.

Öğrenci: Bu 45° çizgisinin üzerinden bir yansıması olmalı.

Profesör Ben Polak: Doğru, kesinlikle. Yani Oyuncu 2 için aynı olan çizgiyi çizersen ki bu Oyuncu 1'in her seçimi için Oyuncu 2'nin en iyi tepkisidir, sadece oyuncuların yerlerini değiştiriyor oluruz ve bu da demek olur ki 45° çizgisinin üzerinden aksettiriyoruz. Yani buradaki 1'den buradaki 2'ye gider ve şöyle görünür. Yani bu Oyuncu 1'in her olası seçimi için Oyuncu 2'nin en iyi tepkisidir ve anladığımızdan emin olmak için bu mavi çizginin anlamı, bana bir S_1 verin, Oyuncu 1 için efor seviyesi verin, yukarıya doğru mavi çizgiye gidip yana doğru bakarım ve bu bana Oyuncu 2'nin en iyi tepkisini verir. Tamam, şimdi biraz ilerleme kaydediyoruz. Ne fark ediyoruz burada?

Hatırlarsanız bugünkü sınıfın derslerinden biri, ikinci ders. İlk ders kalenin ortasına doğru şut çekmeyin ve ikinci daha genel ders neydi? Her şeye en iyi tepki olmayan bir stratejiyi oynamayın. Tamam, itiraf ediyorum burada biraz hile yapıyorum çünkü beklentileri göz ardı ettim, ama bana inanın ki bu oyunda hiç fark etmiyor. Şimdi burada hiçbir şeye hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejiler var mı burada? Başka bir deyişle, Oyuncu 1'in hangi stratejileri hiçbir zaman en iyi tepki olamıyorlar? Birileri var mı? Hadi bir bakalım.

Eğer Oyuncu 2 sıfır seçerse, Oyuncu 1'in en iyi tepkisi 1 ve bu onun gidebileceği en düşük rakam, yani şuradaki 1'den küçük olan stratejiler hiçbir zaman Oyuncu 1'in en iyi tepkisi olmuyorlar. Eğer Oyuncu 2 4 seçerse, o zaman sinerji Oyuncu 1'in en iyi tepkisini ta 2'ye kadar yükseltir, ama bu 2'den büyük stratejiler hiçbir zaman Oyuncu 1'in en iyi tepkisi olmazlar. Bu doğru mu? Yani 1'in altındaki ve 2'nin üstündeki stratejiler hiçbir zaman Oyuncu 1'in en iyi tepkisi olmazlar. Oyuncu 2 için de aynı şekilde, Oyuncu 1'in seçebileceği en düşük şey 0 ve bu durumda Oyuncu 2'nin 1'i seçmek isteyecek, yani 1'in altındaki stratejiler hiçbir zaman Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi olmazlar. Ve 2'nin üstündeki stratejiler de hiçbir zaman Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi olmuyorlar.

Yani hadi aslında – siz defterlerinizle biraz daha kibar olmak isteyebilirsiniz -- ama tahtada bu hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejilerden kurtulalım. Yani Oyuncu 1'in bu stratejilerinin hepsi gitti ve Oyuncu 1'in şu stratejilerinin de hepsi gitti. Kendi defterinizde bu kadar çok karalama yapmak istemeyebilirsiniz, ama yine de. Ve Oyuncu 2'nin şu stratejilerinin hepsi gitti ve Oyuncu 2'nin şuradaki stratejilerinin de hepsi gitti, geriye ne kaldı? Bir sürü karalama kaldı. Ne kaldı? İddia ediyorum eğer dikkatli bakarsanız şu arada küçük bir kutucuk hala hayatta. En iyi stratejilerin – Oyuncu 1 için hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejilerin hepsini sildim, Oyuncu 2 için hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejilerin hepsini sildim ve elimde bu küçük kutu kaldı.

Ama o küçük kutuyu göremiyorum, bu yüzden küçük kutuyu tekrar çizeceğim. Hadi tekrar çizelim. Yani bu kez 1'den 2'ye gidiyor. Ben sadece bu kutucuğu büyüteceğim. Yani 1 şimdi bu, 1 ve bu yukarıda 2, 2 ve hadi araya çeyreklik rakamları koyalım, yani burası, bu ne olacak? $5/4$, $6/4$ ve $7/4$ ve ta burada ise $5/4$, $6/4$ ve $7/4$. Hadi şimdi şu pembe ve mavi çizgilerin bu kutu içinde nasıl görüldüğünü çizelim. Bu sadece şu

küçük kutunun resmi, yani şöyle görünecek sonunda – pembe çizgi buradan buraya uzanır ve mavi çizgi buradan buraya gider. Evde çözümleyip dikkatle kontrol edebiliriz ama bu çok yanlış görünmüyor.

Yapmış olduğum şu sadece bizim şu şeklimizi tekrar ve daha büyük olarak çizdim. Ve bu şekli daha önce gören var mı aranızda? Bu şekli daha önce gören var mı? Bu daha önce elde etmiş olduğumuz şekil, sadece rakamları biraz değiştirdik. Bir kere şu hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejileri sildiğim ve sadece geride kalan stratejilerin bulunduğu küçük kutuya odaklandığımda her ne kadar biraz daha büyük ve rakamlar biraz değişmiş de olsa, şekil eskisiyle tam tamına aynıymış gibi duruyor. Şimdiye kadar ne yaptık? Oyuncular hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejileri oynamamalılar dedik ve bu yüzden onları attık. Şimdi geriye ne kaldı? Şimdi ne yapmalıyız?

Yani atmadığımız stratejilerden bazıları bir takım şeylere en iyi tepkiydi, ama en iyi tepki oldukları bu bir takım şeyler şimdi atılmış durumda. Doğru mu? Bu domine edilen stratejileri sildiğimiz zamandan aşına gelmeli. Şimdi atacağım stratejiler – yanlış anlaşılmasın bunlar en iyi tepki olmadıklarından değil, bunlar bir şeylere en iyi tepkiydi. Ama en iyi tepki oldukları bu şeyler şimdi biliyoruz ki oynanmayacaklar, çünkü bu şeylerin kendileri hiçbir şeye karşı en iyi tepki değildi. Öyleyse hangi stratejilerden bahsediyorum? Hangi stratejileri atmak üzereyim?

Örneğin, Oyuncu 1 için şimdi biliyoruz ki Oyuncu 2 hiçbir zaman 1'in altında bir strateji seçmeyecek, yani Oyuncu 2'nin seçebileceği en düşük rakam 1, ve öyle görünüyor ki Oyuncu 2'nin vereceği herhangi bir tepki de 1 veya üstünde olacak, bu da Oyuncu 1'i hiçbir zaman $5/4$ 'ün altında bir stratejiyi seçmemeye itiyor. Oyuncu 2'nin seçebileceği en yüksek rakam 2 ve de 2 ve altındaki stratejilere Oyuncu 1'in verebileceği en yüksek tepki $6/4$, yani buradaki $6/4$ 'ten büyük olan her şey gidebilir. Burada dikkatli olalım. Burada silmek üzere olduğum stratejiler, bunlar hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejiler değillerdi, bunlar bir şeylere karşı en iyi tepkiydi, ama bu kendilerine karşı en iyi tepki oldukları şeyler, hiçbir zaman oynanmayacak şeyler, yani geçersizler/alakasızlar (irrelevant).

Yani Oyuncu 1 için $5/4$ 'ten düşük olan ve Oyuncu 1 için $6/4$ 'ten büyük olan stratejileri (bu Oyuncu 1 için $1/2$ demek) siliyoruz ve Oyuncu 2 için de aynı şekilde. Ve bunu yapsaydım – ve tekrar not defterinizi fazla karalamayın – ama burada neler olduğunu açıklayacak olursak, ben aslında hiçbir zaman oynanmayacak olan stratejileri sileceğim – sonunda elimde yine küçük bir kutu kaldı.

Herkes ne yaptığımı gördü mü? Bir oyunla başladım. Oyuncu 2'nin tüm olası seçimlerine karşı Oyuncu 1'in en iyi tepkisinin ne olduğunu buldum ve Oyuncu 1'in olası her stratejisine karşı Oyuncu 2'nin en iyi tepkisinin ne olduğunu buldum. Hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejileri attım ve sonra geride kalan stratejilere baktım. Dedim ki şu en iyi tepki olan stratejiler şimdi atılmış olan şeylere karşı en iyi tepkiydi,

ama başka türlü en iyi tepki olmuyorlardı, bu yüzden onları da attım. Ve bunları da atınca yine küçük bir kutu kaldı elimde ve bunu tekrar tekrar yapabilirim.

Bu egzersizi tekrar tekrar yaparsam sonunda elimde ne kalır? Bağırın, sonunda elimde ne kalır? Kesişim noktası, değil mi? Bu kutu içinde kutuları yapmaya devam edersem, bir sonraki kutucuk şurada olacak. Çizmeyeceğim ama bunun gibi görünecek. Ama eğer kutu içinde kutuları çizmeye devam ederseniz, sonunda bu kesişime yakınsayacağım. Yani eğer insanların en iyi tepkiyi oynamayacaklarını – insanların hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejileri oynamayacaklarını bilirsek ve biz kendimizin de hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejileri oynamayacağımızı bilirsek, ve insanların hiçbir zaman en iyi tepki olmayan şeylere karşı en iyi tepki olmayan... vesaire vesaire stratejileri oynamayacaklarını bilirsek. Bu oyunda her oyuncu için bir stratejinin bulunduğu kesişim noktasına yakınsarız.

Yani yakınsayacağımız şey, hadi buna şöyle diyelim S_1^* eşittir $1 + B S_2^*$ ve bu S_2^* da eşittir $1 + B S_1^*$. Aslında oyunun simetrik olduğunu bildiğimizden bundan biraz daha iyisini yapabiliriz, aslında biliyoruz ki S_1^* eşittir S_2^* . Yani S_1^* eşittir S_2^* bilgimize dayanarak (çünkü 45° çizgisi üzerindedir), işleri S_1^* eşittir S_2^* yazarak kolaylaştırabilirim. Yani şimdi elimde, aslında 3 denklem varmış görünüyor, ama gerçekte iki denklemim var çünkü biri diğerini içeriyor. Ve bunları çözebilirim, bunları çözersem de şunu bulurum (burada dikkatli olayım), şöyle bir şey elde ederim ($1 - B$) çarpı S_1^* eşittir 1 veya S_1^* eşittir S_2^* eşittir $1 / (1 - B)$. Ve yine söyleyeyim, tahtada cebir yaptığım zaman birileri evde sağlamasını yapsın, şimdi şuna hızlıca bir göz atın. Doğru mu? Sanırım doğru.

Sık sık yanılan cebirim çözümün S_1^* eşittir S_2^* eşittir $1 / (1 - B)$ olduğunu gösteriyor. Burada yaptığım sadece matematik, ilgi çekici bir şey olmuyor. Şu noktanın denklemini çözmeye uğraşıyorum sadece. Burada ne öğrendik? Öğrendik ki hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejileri silerek ve hiçbir zaman en iyi tepki olmayan stratejilere karşı en iyi tepki olmayan stratejileri silerek vesaire her oyuncu için bir stratejiye ulaşırız. Her oyuncu için tek bir strateji ve onu da bu denklem veriyor.

Yani McKinsey filan için çalışan işletme danışmanları olsaydık ve ev ödevleriniz için veya bu hukuk ortaklığının işleyişi için tavsiye vermek üzere getirilmiş olsaydık, alıp alacağınız çalışmanın bu kadar olacağını ön görecektik. Sorun şu, bu iş seviyesi iyi mi, kötü mü? Hadi bakalım McKinsey için çalışıyorsunuz ve John Smith ile Ann Blogs takım halinde bir problem üzerinde veya ev ödevleriniz üzerinde çalışırken ki stratejilerini belirlemeniz için sizi kiraladı. Ne kadar çalışma katkısında bulunacaklarını hesapladınız. Bu iyi bir çalışma seviyesi mi? Çok fazla mı yoksa çok az mı katkıda bulunuyorlar?

Çünkü cevap şuna bağlı, neye göre? Başka türlü sorayım, bu insanlar, bu firmadaki iki ortak veya ev ödevine çalışan iki öğrenci, en etken/verimli (efficient) seviyeden daha fazla mı daha az mı çalışıyorlar? Hadi bir anket yapalım, kim daha fazla diyor?

Kamerayı dinleyicilere çevirin, hadi bir bakalım. Kim fazla diye düşünüyor? Kim tam doğru seviyede çalıştıklarını düşünüyor? Kim az diye düşünüyor? Çok çekimser var burada. Etken olan seviyeye göre burada çok az çalıştıklarını düşünüyorum. Bunu ev ödevinde yapmanızı isteyeceğim böylece kanıtlamış olacaksınız.

Şunu kanıtlayabilirsiniz, eğer bir kontrat yapıyorken bir sosyal planlamacı varsa daha fazla çalışırsınız. Ama hadi bunun cidden neden olduğunu anlamaya çalışalım. Neden bu hukuk ortaklıklarına, medikal ortaklıklarına, ya da her neyse veya ödev üzerinde çalışan öğrencilere baktığımızda şunu görüyoruz, neden stratejileri anlayıp oyunu çözümlediğimizde verimsiz (inefficient) bir şekilde çok az efor buluyoruz? Cevabı veriyorum. Size çok daha az çalışacaklarını söylüyorum. Neden gerektiği kadar sıkı çalışmıyorlar? Bilen var mı? Mikrofonu şuraya alabilir miyiz, evet.

Öğrenci: Eğer bundan daha fazla çalışırlarsa diğer kişi kaytarır.

Profesör Ben Polak: Tamam bunla ilgili bir şey var, bir şey var. Diğer yandan, aslında bu değil, bana verdiğin fikir bir nevi Tutukluların İkilemi sezgisi. Diğer çalışsın ben kaytarayım demek bu. Ama bir şey var, demem o ki bunda da bir şey var, ama burada olan bundan biraz daha fazlası daha fazla ne oluyor burada? Bu iyi bir ilk adımdı. Bunda da bir şeyler var. Evet.

Öğrenci: Eğer çalışan iki kişi varsa yapılacak iş yarı yarıya demek.

Profesör Ben Polak: Bu doğru ama bu kaytarmanın bir şeyi değiştirmeyeceği anlamına gelir. Burada neler oluyor, Ekonomi 115'e veya 150'ye geri dönün, eğer bu iki desten birini aldıysanız. Buradaki problem ne? Bunun altında yatan problem ne? Şurada aşağıdaki pembeli arkadaşları alalım.

Öğrenci: Marjinal faydalarının sadece %50'sini yakalayabiliyorlar.

Profesör Ben Polak: İşte bu. Güzel, isminiz nedir?

Öğrenci: Patrick.

Profesör Ben Polak: Yani sanırım Patrick doğru cevabı verdi. Buradaki problem aslında çalışma miktarıyla ilgili değil. Bu arada, bu hatta sinerji ile bile ilgili değil. Sinerjiyi doğru bir şekilde hesaba katmadıklarından dolayı olduğunu düşünebilirsiniz. Buradaki problem o değil. Öyle ki sinerji olmadan bile bu problem geçerli. Problem Patrick'in söylediği. Problem şu bu marjda/marjinal olarak (at the margin), ben, ya şu firmada ya da bir ödev grubunda bir çalışan olarak, ben tam marjında katkı yapıyorum, tam marjda maliyete katlanıyorum, ortaya koyduğum her bir birim efor için marjinal maliyetin hepsine katlanıyorum ama faydaların/kârların (benefits) sadece yarısını alıyorum. Marjinal olarak Katkıda bulunduğum her bir ekstra birim efor için maliyete katlanıyorum ama ortaya çıkarılan firma kârının yarısını alıyorum, kâr paylaşımı yüzünden.

Bu ikimizi de daha az efor koymaya itiyor. Ekonomide bu tip şeyler için kullanılan terim nedir? Bu bir “dışsallık” (externality). Bu bir dışsallık. Burada bir dışsallık var. Bu firmaya katkı yapacağım eforu bulurken kârın size giden yarısını hesaba katmıyorum. Yani bunun sinerjiyle ilgisi yok. Bunun karmaşık bir şeyle alakası yok. Bu 115’te bilmiş olduğunuz bir şey. Eğer bir firmada veya bir ev ödevine veya ortak bir projede kâr paylaşım durumu varsa, çok düşük efor katkıda bulundurulacak olması, çünkü bir dışsallık var, sizi endişelendirmeli. Benim eforum size de faydalı oluyor sadece bana değil.

Bu hala tahtada duruyorken üzerinde biraz daha düşünelim. Sinerji seviyesini değiştirsek ne olurdu? B’yi azaltsak ne olurdu? B, yani şu iki çalışan arasındaki sinerjinin seviyesi, B’yi azaltırsak, şekle ne olur? Karalanmamış bir şekil çizeyim. Şuna benzeyen bir şeklimiz vardı. Bu S_1 di ve bu da S_2 ydi. Sinerji seviyesini azalttığımızda bu metotla bulduğumuz efor miktarlarına ne olurdu? Ne olurdu? Şekle ne olurdu? Kimse yok mu, bu yine 115 tarzı bir egzersiz, çizgileri oynatacağız. Evet, Henry değil mi? Henry’ye bir mikrofon ulaştırabilir miyiz?

Öğrenci: Çizgilerin eğimleri azalacak ve sonunda yatay ve dikey olacaklar.

Profesör Ben Polak: Tamam, güzel. Yani aslında pembe çizgi dikleşecek, ama ben ne demek istediğini biliyorum. Yani pembe çizgi dikeye doğru gidecek ve mavi çizgi yataya doğru gidecek ve fark ettiyseniz ortaya çıkaracağımız efor dramatik bir şekilde azalıyor, şu yöne doğru azalıyor. Yani burada sinerjiyi azaltırsak, sadece ben az efor vermiyorum, ama siz de benim az efor vereceğimi biliyorsunuz ve bu yüzden siz de az efor sağlıyorsunuz vesaire. Yani bu yönden bakınca bu makas etkisini görüyoruz. Bundan başka dersler de çıkarabiliriz ama biraz daha ilerleyelim izin verirseniz.

Bu oyunda çözüm için en iyi tepkileri kullanmaya karar vermiştik, hiçbir zaman en iyi tepki olmayan şeyleri silmek, tekrar bakmak, hiçbir zaman en iyi tepki olmayan şeyleri silmek vesaire ve şans eseri bu oyunda yakınsama oldu ve işler şu pembe ve mavi çizginin kesiştiği noktaya yakınsadı. Bu noktaya ne ad veriyoruz? Mavi ve pembe çizgilerin kesiştiği noktaya ne diyoruz? Bu ders için önemli bir kavram bu. Bu *Nash dengesi* dediğimiz şey olacak.

Yani ne dendiğini biliyoruz. Kaçınız daha önce Nash dengesi terimini duymuştu? Kaçınız Nash hakkındaki filmi seyretmişti? Bir dahaki sefere dönüp bunun hakkında konuşacağız. Yani bu bir Nash dengesi, ama tamam biz jargon olarak ne dendiğini biliyoruz ve aslında bunun önemli bir nokta olacağını da biliyorduk, çünkü çoğunuz daha önce ekonomi dersleri aldı ve ekonomide ne zaman çizgiler kesişse bu önemlidir, değil mi? Ama bu burada ne anlama geliyor? Neden bu—bu çizgi üzerinde neler oluyor? Pembe ve mavi çizgilerin kesişmesi bize ne anlatıyor? Bu noktayı özel kılan şey ne? Pembe ve mavi çizgiler kesişiyor demek ne anlama gelir? Şu arkadaki arkadaşı, 3 sıra arkandaki morluyu alabilir miyiz?

Öğrenci: Bu iki oyuncunun da o noktadan ayrılmak için nedeni/isteği (incentive) yok anlamına gelir.

Profesör Ben Polak: Tamam, bu doğruydu. O zaman bunu okumaya çalışalım. Ben isminizi bilmiyorum, isminiz neydi?

Öğrenci: Allen.

Profesör Ben Polak: Yani Allen diyor ki eğer Oyuncu 1 bu stratejiyi ve Oyuncu 2 bu stratejiyi seçmişse, ikisinin de ayrılmak için bir nedeni yok. Başka bir deyişle hiçbir oyuncu uzaklaşmak istemiyor. Yani eğer Oyuncu 1 S_1^* 'ı seçerse, Oyuncu 2 S_2^* 'ı seçiyor çünkü bu Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi. Eğer Oyuncu 2 S_2^* oynuyorsa, Oyuncu 1 S_1^* oynamak ister çünkü bu onun en iyi tepkisi. İkisinin de buradan ayrılmak için bir isteği yok. Kısacası, Oyuncu 1 ve Oyuncu 2, çizgilerin kesiştiği bu noktada, Oyuncu 1 ve Oyuncu birbirlerine karşı en iyi tepkilerini oynuyorlar. Oyuncular birbirlerine karşı en iyi tepkilerini oynuyorlar. Yani bu oyunda bu açıkça çizgilerin kesiştiği nokta.

Hadi rakamlarla oynadığımız oyuna geri gidelim. Herkes bir rakam seçecekti ve sınıf averajının $2/3$ 'üne en yakın seçen kazanacaktı. (Bu arda kazananlar kazançlarını almaya gelmediler henüz ama hala gelebilirler). Yani bu oyunun, bu oyundaki Nash dengesi nedir? Herkesin 1'i seçmesi. Bunun oyunun Nash dengesi olduğunu nereden biliyoruz? Her birinin bir rakam seçtiği o oyunda herkesin 1 seçtiği durumun Nash dengesi olduğunu nereden biliyoruz? Sadece tanımı kullanalım. Herkes 1 seçerse, sınıf ortalaması 1 olur, bunun $2/3$ 'ü $2/3$ olur ve 1'den aşağıya gidemeyeceğiniz için, herkesin en iyi tepkisi 1 seçmek olur.

Tekrar söyleyelim: eğer herkes 1 seçmişse, herkesin 1 seçimi en iyi tepkidir, yani bu da Nash dengesidir. Bu oyunu oynadığımız zaman insanlar Nash dengesini oynadılar mı? Hayır oynamadılar. En azından başlangıçta, ama fark ettiyseniz, oyunu tekrarlırsak ne olur? Oyunu tekrarladığımız zaman gördük ki oyun biçimi azalarak 1'e doğru yakınsıyor. Doğru mu? Bu oyunda, tekrarlanan oyunu analiz ettiğimizde, analizimiz dengeye yakınsıyor gibi görünüyor. Şu andan birinci ara-sınava kadar Nash dengesi çok büyük/çok önemli bir kavram olacak ve Çarşamba günü geldiğimizde bunu ele alıp daha çok örneğe bakacağız.

[transkriptin sonu]